

Índice general

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Forma general de una ecuación diferencial ordinaria	4
1.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	5
1.4. Clasificación de las ecuaciones diferenciales	6
1.4.1. Según el tipo de derivada presente	6
1.4.2. Según el orden de la derivada	7
1.4.3. Según la linealidad o no linealidad	7
1.5. Grado de una ecuación diferencial	8
1.6. Soluciones de ecuaciones diferenciales	9
1.7. Comprobación de una solución	9
1.8. Soluciones implícitas	13
1.9. Familia monoparamétrica de soluciones	15
1.10. Solución particular	16
1.11. Solución general	16
1.12. Solución singular	17
1.13. Intervalo de definición	18
1.14. Curva integral o curva solución	18
1.15. Práctica N° 01	20
2. Problemas con valores iniciales	23
2.1. Problemas de valor inicial de primer orden	23
2.2. Problemas de valor inicial de segundo orden	24
2.3. Problemas de valores en la frontera	26
2.4. Teorema de existencia y unicidad	29
2.5. Práctica N° 02	34

3. Obtención de ecuaciones diferenciales	35
3.1. Por eliminación de sus constantes esenciales	35
3.2. Empleando determinantes	37
3.3. Por eliminación de exponente	39
3.4. Otras formas de eliminación	41
3.5. Práctica N° 03	44
4. Origen de ecuaciones diferenciales	45
4.1. Ecuaciones diferenciales de origen geométrico	45
4.2. Ecuaciones diferenciales de origen físico	57
4.2.1. Resorte - Masa	57
4.2.2. Movimiento pendular	59
4.2.3. Cables suspendidos	60
4.2.4. Hidrodinámica	61
4.2.5. Repartición de periódicos	62
4.2.6. Circuitos eléctricos	63
4.2.7. Construcción de modelos matemáticos	63
4.3. Práctica N° 04	66
5. Campo de direcciones	69
5.1. Método de las isoclinas	73
5.2. Práctica N° 05	77
6. Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado	79
6.1. Ecuaciones diferenciales de variables separables	79
6.2. Ecuaciones diferencial de variables separables de valores iniciales	85
6.3. Aplicaciones a problema que requieren la solución	90
6.4. Ecuaciones diferenciales reducibles a variables separables	108
6.5. Práctica N° 06	114
7. Ecuaciones diferenciales homogéneas	117
7.1. Ecuaciones diferenciales transformables a homogéneas	127
7.2. Ecuaciones que pueden reducirse a homogéneas	136
7.2.1. Ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By^n}{y^{m-1}(Cx + Dy^m)}$	136
7.2.2. Ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{m-1}(Ay + Bx^m)}{Cy + Dx^m}$	138
7.2.3. Ecuación diferencial de la forma $yM(xy)dx + xN(xy)dy = 0$	140
7.2.4. Ecuaciones diferenciales que se reducen a homogéneas por otras sustituciones	141
7.2.5. Ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{y^{m-1}dy}{x^{n-1}dx} = \frac{Ax^n + by^m}{Cx^n + Dy^m}$	147

7.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas como modelo matemático: Aplicaciones	151
7.4. Práctica N° 07	158
8. Ecuaciones diferenciales exactas	161
8.1. Factores integrantes	169
8.2. Factor integrante de la forma $\mu(xy)$	176
8.3. Ecuación diferencial de la forma $(y+x\varphi(x^2+y^2))dx+(y\varphi(x^2+y^2)-x)dy = 0$	183
8.4. Factores integrantes por agrupamiento	186
8.5. Práctica N° 08	197
9. Ecuación diferencial lineal: Métodos de solución	199
9.1. Método de Lagrange	200
9.2. Método de Bernoulli	208
9.3. Método del factor integrante para $y'(x) + P(x)y = Q(x)$	214
9.4. Práctica N° 09	234
10. Algunas ecuaciones diferenciales especiales.	235
10.1. Ecuación de Bernoulli	235
10.1.1. Otros procedimientos	238
10.2. Ecuación de Riccati	243
10.3. Ecuación de Clairaut	251
10.4. Ecuación de Lagrange	259
10.5. Práctica N° 10	269
11. Trayectorias ortogonales y curva integral singular	271
11.1. Trayectorias ortogonales	271
11.2. Curva integral singular	288
11.3. Práctica N° 11	301
12. Ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden y grado superior	303
12.1. Tipo I	303
12.2. Tipo II	308
12.3. Tipo III	316
12.4. Tipo IV	325
12.5. Práctica N° 12	335
13. Ecuación diferencial de segundo orden	337
13.1. Ecuación diferencial lineal homogénea	338
13.2. Ecuación diferencial lineal no homogénea	338
13.3. Solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden	340
13.4. Determinación de soluciones particulares en la ecuación de segundo orden	351

13.4.1. Caso I	352
13.4.2. Caso II	356
13.4.3. Caso III	360
13.4.4. Caso IV	364
13.4.5. Caso V	369
13.5. Práctica N° 13	373
14. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n	375
14.1. El Wronskiano	376
14.2. Ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes	383
14.2.1. Caso I. Raíces reales distintas	384
14.2.2. Caso II. Raíces reales múltiples	386
14.2.3. Caso III. Raíces complejas conjugadas	389
14.2.4. Caso IV. Raíces complejas conjugadas múltiples	392
14.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes	395
14.3.1. Método de los coeficientes indeterminados	396
14.3.2. Método de selección	413
14.4. Práctica N° 14	438
15. Método de variación de parámetros	441
15.1. Práctica N° 15	458
16. Algunas aplicaciones de la ecuación de segundo orden	459
16.1. Cable colgante	459
16.2. Deflexión de vigas	465
16.3. Movimiento rectilíneo	480
16.3.1. Fuerza de atracción	480
16.3.2. Fuerza de repulsión	485
16.4. Circuito eléctricos sencillos	491
16.5. Sistemas osciladores de resorte-masa	497
16.5.1. Movimiento libre no amortiguado	497
16.5.2. Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado	498
16.6. Práctica N°16	506
17. El operador diferencial	509
17.1. Propiedades del operador diferencial	510
17.2. El operador $L(D)$ y las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas	514
17.3. El factor $(D - m)$	520
17.4. El factor $(D - m) = (D - (a + bi))$	524
17.5. El operador $L(D)$ y las ecuaciones diferenciales no homogéneas	532
17.5.1. Primer procedimiento	533
17.6. Práctica N°17	543

18. Ecuaciones diferenciales de Euler	545
18.1. Ecuación diferencial de Euler-Legendre	565
18.2. Práctica N° 18	574
19. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	575
19.1. Solución de un sistema de ecuaciones lineales	576
19.2. Número de constantes arbitrarias en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales	576
19.3. Método de solución: Procedimiento básico	577
19.4. Método de los operadores	591
19.5. Método de reducción de un sistema a una ecuación de n -ésimo orden ...	609
19.6. Método de Euler de integración de un sistema... ..	620
19.6.1. Raíces múltiples	632
19.7. Empleo de determinantes	636
19.8. Práctica N° 19	649
20. Resolución de ecuaciones por series de potencias	653
20.1. Convergencia	654
20.2. Series especiales	655
20.2.1. Serie binomial	655
20.2.2. Serie exponencial	655
20.2.3. Serie logarítmica	655
20.2.4. Serie trigonométrica	656
20.2.5. Funciones elementales y especiales en sumatorias	656
20.3. Serie de Taylor	657
20.4. Función analítica en un punto	657
20.5. Intervalo de Convergencia	657
20.6. Radio de convergencia	657
20.7. Derivación término a término de series de potencias	663
20.8. Principio de Identidad	664
20.9. Soluciones en series de potencias	664
20.9.1. Ecuaciones lineales de primer orden	664
20.10 Existencia de soluciones en serie de potencias	665
20.11 Determinación de una solución en serie de potencias	665
20.12 Radio de convergencia	669
20.13 Resolución de ecuaciones lineales de segundo orden por series de potencias	676
20.14 Práctica N° 20	685
21. Transformada de Laplace	687
21.1. Funciones de orden exponencial	691
21.2. Propiedades de las funciones de orden exponencial	691
21.3. Transformada de Laplace de algunas funciones elementales	697

21.3.1. Transformada de una función constante	697
21.3.2. Transformada de la función identidad	698
21.3.3. Transformada de la función cuadrática	699
21.3.4. Transformada de la función exponencial e^{ax}	700
21.3.5. Transformada de la función exponencial e^{-ax}	701
21.3.6. Transformad de la función seno	701
21.4. Propiedades de las transformadas de Laplace	702
21.5. Función Gamma.	707
21.6. Otras transformadas de Laplace	711
21.7. Transformadas inversas	723
21.8. Transformada de Laplace para derivadas	727
21.9. Transformada de Laplace para derivadas de orden n	728
21.10 Transformada de Laplace para integrales	732
21.11 Solución de ecuaciones diferenciales lineales... ..	735
21.12 Práctica N°21	741
22. Respuestas	747
A. Una breve introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias ..	773
A.1. Integral y derivada fraccionarias	773
A.2. Ecuaciones diferenciales fraccionarias	780
Referencias	783
Índice alfabético	785